ΕΦΑΡΜΟΓΗ

• ΝΔΟ $\lim_{\nu \to +\infty} \int_{1/(\nu+a)}^{1/\nu} \frac{\eta\mu(x^2)}{x^4}\,dx = a$, $a>0$ και $\nu \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

Επιλέγουμε τις συναρτήσεις

$f(x) = \frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

Όπου :
- f φραγμένη (διότι $|f(x)| = \left|\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ και η $\frac{1}{x^2}$ φραγμένη στο $\left[\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu+a}\right]$
- f συνεχής και $g(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ και συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu+a}\right]$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με "α" αν το υπολογίσουμε.

Άρα, από ΘΜΤ (ολ. λογ.): $\exists\, \xi \in \left[\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu+a}\right]$:

$$\int_{1/(\nu+a)}^{1/\nu} \frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = f(\xi)\cdot\int_{1/(\nu+a)}^{1/\nu} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\eta\mu(\xi^2)}{\xi^2}\cdot a .$$

Επειδή, $\frac{1}{\nu+a} \leq \xi \leq \frac{1}{\nu} \Rightarrow \underbrace{\lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{\nu+a}\right)}_{=0} \leq \xi \leq \underbrace{\lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)}_{=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Άρα, το $\xi \rightarrow 0$

Επομένως,

$$\lim_{\nu\to+\infty} \int_{\frac{1}{\nu+a}}^{\frac{1}{\nu}} \frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = a \cancel{\lim_{\xi\to+\infty}} \frac{\eta\mu(\xi^2)}{\xi^2} = a$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

- ΝΔΟ

$$\frac{\pi}{6} \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-k^2\cdot x^2)}} \le \frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4}k^2\right)^{-1/2}, \quad |k|<2$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε συναρτήσεις αφού φτιάξουμε λίγο το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{1/2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-k^2\cdot x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Θέτω $f(x)=(1-k^2\cdot x^2)^{-\frac{1}{2}}$ και $g(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

πληρούνται τα κριτήρια του ΘΜΤ

άρα: $$\int_0^{1/2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-k^2\cdot x^2)^{-\frac{1}{2}} = f(\xi)\cdot\int_0^{1/2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= (1-k^2\cdot\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= (1-k^2\cdot\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot \text{Τοξημ}x\Big|_0^{1/2} =$$

$$= (1-k^2\cdot\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\text{Τοξημ}\frac{1}{2}-\text{Τοξημ}0\right)=$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot(1-k^2\cdot\xi^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Θεωρούμε $h(\xi)=\frac{\pi}{6}(1-k^2\cdot\xi^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow h'(\xi)=\frac{\pi}{6}\xi k^2(1-k^2\xi^2)^{-3/2} > 0$$

Άρα, η $h \uparrow$ στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

$$0\le x\le\frac{1}{2} \Rightarrow h(0)\le h(x)\le h\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}\le h(x)\le\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4}k^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-k^2\cdot x^2)}}\right)$$